Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 54

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

7 de marzo de 2021

1. Demostrar que $SO(2)$ es un grupo de Lie.

Tenemos que demostrar que el conjunto de matrices

$$SO(2) = \left\{ M(a) = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} \right\}$$

Empecemos comprobando la propiedad de clausura, es decir:

$$M(a)M(b) \in SO(2), \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} M(a)M(b) &= \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos a \cos b - \sin a \sin b & -\cos a \sin b - \sin a \cos b \\ \sin a \cos b + \cos a \sin b & -\sin a \sin b + \cos a \cos b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donde he usado las propiedades trigonométricas

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Quedando demostrado el postulado de clausura.

El segundo postulado que queremos demostrar es la asociatividad del producto de matrices, recordemos que el producto de dos matrices viene dado por:

$$(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

Aplicando esto al producto de tres matrices

$$A(BC) = \sum_k a_{ik}(BC)_{kj} = \sum_k a_{ik} \left(\sum_l b_{kl} c_{lj} \right) = \sum_{k,l} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

$$(AB)C = \sum_k \left(\sum_l a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} = \sum_{k,l} a_{il} b_{lk} c_{kj} = \sum_{k,l} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

Por lo que queda demostrada la propiedad asociativa en las matrices

Vamos ahora a comprobar que la matriz identidad forma parte del grupo $SO(2)$. En efecto simplemente podemos escoger $a = 0$ obteniendo

$$M(0) = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma demostramos que la matriz identidad forma parte del grupo y que la paremetrización tiene la propiedad deseada $M(0) = \mathbb{I}$.

Finalmente, queremos comprobar que, para cada elemento del grupo (es decir, cada valor de a), existe una matriz inversa que también forma parte del grupo. Para comprobar que todas las matrices de $SO(2)$ son invertibles vamos a calcular su determinante en función del parámetro a:

$$\det\{M(a)\} = \begin{vmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{vmatrix} = \cos^2 a + \sin^2 a = 1, \qquad \forall a$$

Para encontrar la matriz inversa, podemos usar la formula general para matrices $2x2$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Que nos da como resultado

$$M(a)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-a) & -\sin(-a) \\ \sin(-a) & \cos(-a) \end{pmatrix} = M(-a) \in SO(2)$$

Aunque Javier no lo pida para este ejercicio, vamos a ampliar un poco más y calcular el generador del grupo, usando la fórmula dada por Javier podemos calcularlo como

$$B = \left.\frac{\mathrm{d}M(a)}{\mathrm{d}a}\right|_{a=0} = \left.\begin{pmatrix} -\sin a & -\cos a \\ \cos a & -\sin a \end{pmatrix}\right|_{a=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y las congruencias vendrán dadas por las ecuaciones

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a} = -y, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a} = x$$

Derivando la primera ecuación y sustituyendo la segunda obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}a^2} = -x \Longrightarrow x = A\cos a + B\sin a$$

Por lo que nos queda

$$y = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a} = A\sin a - B\cos a$$

Sustituyendo las condiciones iniciales

$$x_0 = A, \qquad y_0 = -B \Longrightarrow \begin{cases} x = x_0\cos a - y_0\sin a \\ y = x_0\sin a + y_0\cos a \end{cases}$$

Estas dos ecuaciones se pueden juntar como

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 = \text{const.} \tag{1}$$

Por lo tanto, las congruencias serán círculos centrados en el origen y de radio $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.